BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2013***

УДК 517-946

ПРИМЕНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

К.К.ГАСАНОВ, Т.С.ТАНЫРВЕРДИЕВ
Бакинский Государственный Университет
hxanim@inbox.ru.

В работе применяется принцип оптимальности Беллмана к решению задачи оптимального управления линейного параболического уравнения с интегральным квадратичным критерием качества. Далее, рассматриваются два более простых случаи, на которых показывается эффективность этого метода. Метод динамического программирования часто применяется для анализа и синтеза систем оптимального управления [1, 2, 3].
.

Ключевые слова: управление, функционал, дифференциал Фреше, градиент, уравнения Беллмана, интегро-дифференциальное уравнение Риккати, собственные и присоединенные функции, приближенные решения.

1. Пусть объект управления в области $D(0 < t < T,\ 0 < x < l)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(t,x)\frac{\partial y}{\partial x} \right) - b(t,x)y + u(t,x) \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(0,x) = \varphi(x),\ \ 0 \le x \le l \tag{2}$$

и неклассическими краевыми условиями

$$y(t,0) = y(t,l),\ \ y_x(t,l) = 0,\quad 0 \le t \le T\ , \tag{3}$$

где $a(t,x) \in L_\infty(D),\quad b(t,x) \in L_2(D),\quad a(t,x) \ge \alpha > 0,\quad b(t,x) \ge \alpha$ (α -число), $\varphi(x) \in L_2(0,l),\quad u(t,x)$ - управляющая функция.

Допустимыми управлениями являются все функции из $L_2(D)$, для которых существует конечный предел

$$\lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} \int_0^l u^2(\tau,x)dxd\tau = \int_0^l u^2(t,x)dx, \text{ почти при всех } t \in [0,T]. \tag{4}$$

Обозначим через $\Omega[\tau, \tau+\delta]$ множество допустимых управлений, определенных на $\{\tau \le t < \tau+\delta, \quad 0 < x < l\}$.

В выбранном классе допустимых управлений требуется указать управление $u(t,x)$ такое, чтобы функционал

$$J(u) = \int_0^l \alpha(x) y^2(T,x)dx + \gamma \int_0^T \int_0^l u^2(t,x)dxdt \tag{5}$$

принимал наименьшее возможное значение, где $\alpha(x) > 0$ - заданная функция из $L_\infty(0,l)$, $\gamma > 0$, T - фиксированный момент времени, $y(t,x)$-обобщенное решение задачи (1)-(3) при управлении $u(t,x)$ (см. [5]).

Вводим функционал

$$S[t, y(t,\cdot)] = \min_{u \in \Omega[t,T]} \left\{ \int_0^l \alpha(x) y^2(T,x)dx + \gamma \int_t^T \int_0^l u^2(\tau,x)dxd\tau \right\}. \tag{6}$$

Для любого $\delta > 0$ $(t+\delta < T)$ это соотношение перепишем в виде

$$S[t+\delta, y(t+\delta,\cdot)] = \min_{u \in \Omega[t+\delta,T]} \left\{ \int_0^l \alpha(x) y^2(T,x)dx + \gamma \int_{t+\delta}^T \int_0^l u^2(\tau,x)dxd\tau \right\}.$$

По принципу оптимальности Беллмана, имеем

$$S[t, y(t,\cdot)] = \min_{u \in \Omega[t,t+\delta]} \left\{ \gamma \int_t^{t+\delta} \int_0^l u^2(\tau,x)dxd\tau + S[t+\delta, y(t+\delta,\cdot)] \right\}. \tag{7}$$

При условии (4) для $t \in [0,T]$ можно написать

$$\int_t^{t+\delta} \int_0^l u^2(\tau,x)dxd\tau = \delta \int_0^l u^2(t,x)dx + o(\delta),$$

где $\lim\limits_{\delta \to +0} \dfrac{o(\delta)}{\delta} = 0$.

Учитывая это равенство в (7), имеем

$$S[t, y(t,\cdot)] = \min_{u \in \Omega[t,t+\delta]} \left\{ \delta\gamma \int_0^l u^2(t,x)dx + S[t+\delta, y(t+\delta,\cdot)] + o(\delta) \right\}. \tag{8}$$

Положим, что

$$\Delta y(t,x) = y(t+\delta,x) - y(t,x).$$

Предполагая, что $S[t, y(t,\cdot)]$ как функция от t непрерывно-дифференцируема и как функционал от $y(t,x)$, имеет дифференциал Фреше, получим

$$-\frac{\partial S[t, y(t,\cdot)]}{\partial t}\delta = \min_{u \in \Omega[t,t+\delta]} \left\{ \delta\gamma \int_0^l u^2(t,x)dx + dS[t, y(t,\cdot), \Delta y(t,\cdot)] + \right.$$

$$\left. + o(\delta) + \omega(t, y(t,\cdot), \Delta y(t,\cdot)) \right\}, \tag{9}$$

где $dS[t,y(t,\cdot),\Delta y(t,\cdot)]$-дифференциал Фреше функционала $S[t,y(t,\cdot)]$, вычисленный в точке $(t,y(t,x))$,

$$\lim_{\|\Delta y\|\to 0}\frac{\omega(t,y(t,\cdot),\Delta y(t,\cdot))]}{\|\Delta y\|}=0.$$

Дифференциал Фреше $dS[t,y(t,\cdot),\Delta y(t,\cdot)]$ является линейным непрерывным функционалом в гильбертовом пространстве $L_2(0,l)$, поэтому существует функция $v(t,x)$ из $L_2(0,l)$ почти при $t\in[0,T]$ такая, что

$$dS[t,y(t,\cdot),h(\cdot)]=\int_0^l v(t,x)h(x)dx,\ \forall h(x)\in L_2(0,l). \tag{10}$$

Функция $v(t,x)$ называется градиентом функционала $S[t,y(t,\cdot)]$.

Подставляя (10) в уравнение (9), получим

$$-\frac{\partial S[t,y(t,\cdot)]}{\partial t}\delta=\min_{u\in\Omega[t,t+\delta]}\left\{\delta\gamma\int_0^l u^2(t,x)dx+\int_0^l v(t,x)\Delta y(t,x)dx+\right.$$

$$\left.+o(\delta)+\omega(t,y(t,\cdot),\Delta y(t,\cdot))\right\}. \tag{11}$$

В дальнейшем предположим, что $v(t,x)\in W_2^{(1)}(D)$. Тогда используя тождество

$$\int_0^l v(t,x)\Delta y(t,x)dx=\int_0^l [v(t,x)y(t,x)]_t^{t+\delta}dx-\int_0^l y(t+\delta,x)[v(t,x)]_t^{t+\delta}dx$$

и определение обобщенного решения краевой задачи (1)-(3), имеем

$$\int_0^l v(t,x)\Delta y(t,x)dx=\int_t^{t+\delta}\int_0^l\left[\frac{\partial v}{\partial t}y(\tau,x)-a(\tau,x)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}-b(\tau,x)v(\tau,x)y(\tau,x)+\right.$$

$$\left.+v(\tau,x)u(\tau,x)\right]dxd\tau-\int_0^l y(t+\delta,x)[v(t,x)]_t^{t+\delta}dx.$$

Учитывая это равенство в (11), получим

$$-\frac{\partial S[t,y]}{\partial t}\delta=\min_{u\in\Omega[t,t+\delta]}\left\{\delta\gamma\int_0^l u^2(t,x)dx+\int_t^{t+\delta}\int_0^l\left[\frac{\partial v}{\partial t}y(\tau,x)-\right.\right.$$

$$-a(\tau,x)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}-b(\tau,x)v(\tau,x)y(\tau,x)+v(\tau,x)u(\tau,x)]dxd\tau-$$

$$\left.-\int_0^l y(t+\delta,x)[v(t,x)]_t^{t+\delta}dx+o(\delta)+\omega(t,y(t,\cdot),\Delta y(t,\cdot))\right\}.$$

Разделяя обе стороны на δ и переходя к пределу при $\delta \to +0$, получим

$$-\frac{\partial S[t,y]}{\partial t} = \min_{u\in\Omega[t]} \int_0^l \Big[\gamma u^2(t,x) + v(t,x)u(t,x) - $$

$$- a(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} - b(t,x)v(t,x)y(t,x) \Big] dx.$$

Это уравнение является искомым уравнением Беллмана для рассматриваемой задачи оптимального уравнения. Из выражения, стоящего в правой части уравнения Беллмана, минимум по $u(t,x)$ достигается при

$$u(t,x) = -\frac{1}{2\gamma} v(t,x). \tag{12}$$

Тогда, исключая $u(t,x)$ из уравнения Беллмана, имеем

$$\frac{\partial S[t,y]}{\partial t} = \int_0^l \left[\frac{1}{4\gamma} v^2(t,x) + a(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} + b(t,x)v(t,x)y(t,x) \right] dx. \tag{13}$$

Решение уравнения Беллмана будем искать в виде

$$S[t,y] = \int_0^l \int_0^l K(t,x,s)y(t,x)y(t,s)dxds, \tag{14}$$

где функцию $K(t,x,s)$ надо определить.

Предположим, что функция $K(t,x,s)$ непрерывна и имеет непрерывное частное производное по t и дважды непрерывно дифференцируема по x и s.

Из (14) получим

$$\frac{\partial S[t,y]}{\partial t} = \int_0^l \int_0^l K_t(t,x,s)y(t,x)y(t,s)dxds. \tag{15}$$

Вычисляя дифференциал Фреше из (14), имеем

$$dS[t, y(t,\cdot), h(\cdot)] = \int_0^l \int_0^l [K(t,x,s) + K(t,s,x)]y(t,s)h(x)dxds,$$

где $\forall h(x) \in L_2(0,l)$.

В силу равенства (10) получим

$$v(t,x) = \int_0^l [K(t,x,s) + K(t,s,x)]y(t,s)ds. \tag{16}$$

Подставляя выражения (15), (16) в соотношение (13), имеем

$$\int_0^l \int_0^l K_t(t,x,s)y(t,x)y(t,s)dxds =$$

$$=\frac{1}{4\gamma}\int_0^l\left(\int_0^l(K(t,x,s)+K(t,s,x))y(t,s)ds\right)^2dx+$$

$$+\int_0^l a(t,x)\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^l(K(t,x,s)+K(t,s,x))y(t,s)ds\right)dx+$$

$$+\int_0^l b(t,x)y(t,x)\left(\int_0^l(K(t,x,s)+K(t,s,x))y(t,s)ds\right)dx. \qquad (17)$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^l a(t,x)\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^l(K(t,x,s)+K(t,s,x))y(t,s)ds\right)dx=$$

$$=a(t,x)y(t,x)\int_0^l(K_x(t,x,s)+K_x(t,s,x))y(t,s)ds\Bigg|_{x=0}^{x=l}-$$

$$-\int_0^l y(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a(t,x)\int_0^l(K_x(t,x,s)+K_x(t,s,x))y(t,s)ds\right)dx. \qquad (18)$$

Предположим, что функция $K(t,x,s)$ удовлетворяет следующим условиям

$$K(t,0,s)=0,\ a(t,0)K_x(t,0,s)=a(t,l)K_x(t,l,s),$$

$$(19)$$

$$K(t,x,0)=0, a(t,0)K_s(t,x,0)=a(t,l)K_s(t,x,l).$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^l\left(\int_0^l(K_t(t,x,s)+K(t,s,x))y(t,s)ds\right)^2dx=$$

$$=\int_0^l\int_0^l\left(\int_0^l(K(t,x,\xi)+K(t,\xi,x))(K(t,s,\xi)+K(t,\xi,s))d\xi\right)y(t,x)y(t,s)dxds. \qquad (20)$$

Учитывая равенства (18), (19), (20) в (17), имеем

$$\int_0^l\int_0^l\Bigg\{K_t(t,x,s)+\frac{\partial}{\partial x}(a(t,x)K_x(t,x,s))+\frac{\partial}{\partial s}(a(t,s)K_s(t,x,s))-$$

$$-b(t,x)K(t,x,s)-b(t,s)K(t,s,x)-\frac{1}{4\gamma}\int_0^l(K(t,x,\xi)+$$

$$+K(t,\xi,x))(K(t,s,\xi)+K(t,\xi,s))d\xi \Bigg\} y(t,x)y(t,s)dxds=0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться для любой функции $y(t,x)$, то отсюда следует, что

$$K_t(t,x,s)+\frac{\partial}{\partial x}(a(t,x)K_x(t,x,s))+\frac{\partial}{\partial s}(a(t,s)K_s(t,x,s))-$$

$$-b(t,x)K(t,x,s)-b(t,s)K(t,s,x)-$$

$$-\frac{1}{4\gamma}\int_0^l (K(t,x,\xi)+K(t,\xi,x))(K(t,s,\xi)+K(t,\xi,s))d\xi=0. \quad (21)$$

В силу определения $S[t,y(t,\cdot)]$ следует, что

$$S[T,y(T,\cdot)]=\int_0^l \alpha(x)y^2(T,x)dx. \quad (22)$$

Отсюда имеем

$$K(T,x,s)=\alpha(x)\delta(s-x), \quad (23)$$

где $\delta(x)$ - функция Дирака.

Таким образом, чтобы найти решение уравнения Беллмана и градиент функционала $S[t,y(t,\cdot)]$, сначала надо решить уравнение (21) при граничных условиях (19) и начальном условии (23).

Эту краевую задачу будем называть интегро-дифференциальным уравнением Риккати, которое является обобщением уравнения Риккати появляющегося при решении задач синтеза оптимального управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Если известна функция $K(t,x,s)$, то с помощью формулы (14) можно найти минимальное значение функционала (5):

$$\min_u J(u)=S[0,y(0,\cdot)]=\int_0^l\int_0^l K(0,x,s)\varphi(x)\varphi(s)dxds.$$

Однако, в общем случае не удается найти практический способ определения $K(t,x,s)$. Поэтому в дальнейшем рассмотрим два более простых варианта.

2. Пусть $a(t,x)\equiv 1,\ b(t,x)\equiv 0,\ \alpha(x)\equiv 1,\ (t,x)\in D$. В этом случае для любой $u(t,x)\in L_2(D)$ задача (1)-(3) однозначно разрешима в $W_2^{1,2}(D)$, если $\varphi(x)\in W_2^1(0,l),\ \varphi(0)=\varphi(l)$. Решение $y(t,x)$ непрерывна зависит от t в норме $W_2^1(0,l)$ (см. [4]). Кроме того, решение задачи можно разложить в ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям задачи

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,\ 0 < x < l,$$
$$X'(l) = 0,\ X(0) = X(l). \tag{24}$$

Обозначим через $\lambda_k = \dfrac{2k\pi}{l},\ k = 0,1,2,...$ собственные значения и

$$X_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ X_{2k-1}(x) = \frac{2}{l}\cos\lambda_k x,\ X_{2k}(x) = \frac{2}{l}(l-x)\sin\lambda_k x, \tag{25}$$

систему собственных и присоединенных функций,

$$Y_0(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}s,\ Y_{2k-1}(s) = \frac{2}{l}s\cos\lambda_k s,\ Y_{2k}(s) = \frac{2}{l}\sin\lambda_k s,\ k = 1,2,..., \tag{26}$$

систему собственных и присоединенных функций сопряженной задачи. Системы функций (25) и (26) образуют базис в $L_2(0,l)$ и биортогональны.

Для каждого допустимого управления $u(t,x)$ существует единственное решение $y(t,x)$, представимое в виде

$$y(t,x) = \int_0^l G(x,s,t)\varphi(s)ds + \int_0^t\int_0^l G(x,s,t-\tau)u(\tau,s)dsd\tau, \tag{27}$$

где

$$G(x,s,t) = X_0(x)Y_0(s) +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{X_{2k}(x)Y_{2k}(s) + (X_{2k-1}(x) - 2\lambda_k t X_{2k}(x))Y_{2k-1}(s)\right\}e^{-\lambda_k^2 t}. \tag{28}$$

В этом случае задача (19), (21), (23) принимает вид

$$K_t + K_{xx} + K_{ss} = \frac{1}{4\gamma}\int_0^l (K(t,x,\xi) + K(t,\xi,x))(K(t,s,\xi) + K(t,\xi,s))d\xi,$$
$$K(t,0,s) = 0,\ K_x(t,0,s) = K_x(t,l,s),\ K(t,x,0) = 0, K_s(t,x,0) = K_s(t,x,l),$$
$$K(T,x,s) = \delta(s-x). \tag{29}$$

Решение задачи (29) ищем в виде

$$K(t,x,s) = \sum_{i,j}^{\infty} K_{ij}(t)Y_i(x)Y_j(s). \tag{30}$$

Подставляя функцию (30) в задаче (29), получаем

$$\dot{K}_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha^2(K_{\alpha\beta} + K_{\beta\alpha}) + \frac{1}{4\gamma}\sum_{i,j=0}^{\infty}A_{ij}(K_{\alpha i} + K_{i\alpha})(K_{\beta j} + K_{j\beta}),$$
$$K_{\alpha\beta}(T) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \ \text{при} \ \ \alpha = \beta, \\ 0 \ \text{при} \ \ \alpha \neq \beta,\ \alpha,\beta = 0,1,2,..., \end{cases} \tag{31}$$

где $A_{ij}=\int\limits_0^l Y_i(\xi)Y_j(\xi)d\xi$.

Несмотря на то, что для определения функций $K_{\alpha\beta}(t)$ имеем полную систему уравнений, однако не удается найти практический способ определения $K_{\alpha\beta}(t)$. Для решения приходится пользоваться лишь приближенными методами. Для приближенного решения возьмем функцию

$$u_m(t,x)=\int\limits_0^l K_m(t,x,s)y^{(m)}(t,s)ds\,, \tag{32}$$

где

$$K_m(t,x,s)=\sum_{i,j=0}^{m}K_{ij}^{(m)}(t)Y_i(x)Y_j(s)\,,$$

$$K_{\alpha\beta}^{(m)}=\lambda_\alpha^2(K_{\alpha\beta}^{(m)}+K_{\beta\alpha}^{(m)})+\frac{1}{4\gamma}\sum_{i,j=0}^{m}A_{ij}(K_{\alpha i}^{(m)}+K_{i\alpha}^{(m)})(K_{\beta j}^{(m)}+K_{j\beta}^{(m)}),$$

$$K_{\alpha\beta}^{(m)}(T)=\delta_{\alpha\beta},\quad \alpha,\beta=0,1,2,...,m.$$

$y^{(m)}(t,x)$ - решение краевой задачи, получаемой из (1)-(3) путем замены $u(t,x)$ на функцию $u_m(t,x)$, т.е.

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\int\limits_0^l K_m(t,x,s)y(t,s)ds\,.$$

Тогда $u_m(t,x)\in L_2(D)$ и такая форма решения удобна в том случае, когда точное решение задачи получить не удается и приходится ограничиваться приближенным решением. Покажем, что приближение $u_m(t,x)$ сходится к $u(t,x)$ в метрике $L_2(D)$ при $m\to\infty$.

Используя неравенство

$$\left|K_m(t,x,s)y^{(m)}(t,s)-K(t,x,s)y(t,s)\right|\le\left|K_m(t,x,s)\right|\left|y^{(m)}(t,s)-y(t,s)\right|+$$

$$+\left|K_m(t,x,s)-K(t,x,s)\right|\left|y(t,s)\right|$$

и учитывая (12), (16), (32) получим

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left|u_m(t,x)-u(t,x)\right|^2dxdt\le$$

$$\le\int\limits_0^T\int\limits_0^l\int\limits_0^l K_m^2(t,x,s)dxdsdt\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left|y^{(m)}(t,s)-y(t,s)\right|^2dsdt+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\int_0^l \left|K_m(t,x,s)-K(t,x,s)\right|^2 dxdsdt\int_0^T\int_0^l y^2(t,s)dsdt.$$

Отсюда следует сходимость $u_m(t,x)$ к $u(t,x)$ в метрике $L_2(D)$ при $m\to\infty$.

3. Пусть кроме условия пункта 2, граничные условия являются самосопряженными, а именно

$$y(t,0)=0,\ y(t,l)=0\ .$$

В этом случае, собственные значения есть $\lambda_k=\dfrac{k\pi}{l}$ и полная система ортонормированных собственных функций $v_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_k x,$ $k=1,2,...$. В данном случае, для определения $K(t,s,x)$ получаем задачу

$$K_t+K_{xx}+K_{ss}=\frac{1}{4\gamma}\int_0^l (K(t,x,\xi)+K(t,\xi,x))(K(t,s,\xi)+K(t,\xi,s))d\xi,$$

$$K(t,0,s)=0,\ K(t,l,s)=0, K(t,x,0)=0, K(t,x,l)=0, K(T,x,s)=\delta(s-x).\quad (33)$$

Решение краевой задачи (33) ищем в виде

$$K(t,x,s)=\sum_{i,j=1}^{\infty}K_{ij}(t)v_i(x)v_j(s)\,.\quad (34)$$

Подставляя функцию (34) в уравнение краевой задачи (33), получаем уравнения для определения $K_{\alpha\beta}(t)$:

$$\dot K_{\alpha\beta}=\lambda_\alpha^2(K_{\alpha\beta}+K_{\beta\alpha})+\frac{1}{4\gamma}\sum_{i=1}^{\infty}A_{ij}(K_{\alpha i}+K_{i\alpha})(K_{\beta j}+K_{j\beta}),\alpha,\beta=1,2,...\ .\quad (35)$$

Учитывая начальное условие, которому должна удовлетворять функция $K(t,x,s)$, получаем

$$K_{\alpha\beta}(T)=\delta_{\alpha\beta}\,.\quad (36)$$

Непосредственной проверкой легко показать, что функции $K_{\alpha\beta}(t)\equiv 0,\ t\in[0,T]$ при $\alpha\neq\beta$ являются решением задачи (35), (36).

Для $\alpha=\beta$ функции $K_{\alpha\alpha}(t)$ являются решением задачи

$$\dot K_{\alpha\alpha}=2\lambda_\alpha^2K_{\alpha\alpha}+\frac{1}{\gamma}K_{\alpha\alpha}^2,\ K_{\alpha\alpha}(T)=1,\ \alpha=1,2,...\quad (37)$$

Эта задача имеет следующее решение:

$$K_{\alpha\alpha}(t)=\frac{2\gamma\lambda_\alpha^2e^{-2\lambda_\alpha^2(T-t)}}{1+2\gamma\lambda_\alpha^2-e^{-2\lambda_\alpha^2(T-t)}}\,.\quad (38)$$

В данном случае, функция $K(t,x,s)$ определена в форме

$$K(t,x,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\gamma\lambda_i^2 e^{-2\lambda_i^2(T-t)}}{1+2\gamma\lambda_i^2-e^{-2\lambda_i^2(T-t)}}v_i(x)v_i(s). \qquad (39)$$

Подставляя функцию (39) в (13), (16), (12) найдем функционал $S[t,y(t,\cdot)]$, градиент $v(t,x)$, оптимальное управление $u(t,x)$.

Из (38) следует, что функции $K_{\alpha\alpha}(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\left|K_{\alpha\alpha}(t)\right|\le e^{-2\lambda_\alpha^2(T-t)},\ t\in[0,T].$$

Отсюда

$$\int_0^T K_{\alpha\alpha}^2(t)dt\le\frac{1}{4\lambda_\alpha^2},\ \alpha=1,2,3,...$$

Так как система $\{v_i(x)\}$ является полной ортонормированной, по равенству Парсеваля

$$\int_0^T\int_0^l\int_0^l K^2(t,x,s)dxdsdt=\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^T K_{\alpha\alpha}^2(t)dt\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4\lambda_\alpha^2}<+\infty.$$

Учитывая, что решение $y(t,x)$ задачи (1)-(3) также принадлежит $L_2(0,l)$ при $t\in[0,T]$ и используя неравенство Коши-Буняковского, из (18) получим

$$\int_0^T\int_0^l u^2(t,x)dxdt=\int_0^T\int_0^l\left(\frac{1}{\gamma}\int_0^l K(t,x,s)y(t,s)ds\right)^2dxdt\le$$

$$\le\frac{1}{\gamma^2}\int_0^T\left(\int_0^l\int_0^l K^2(t,x,s)dxds\right)\left(\int_0^l y^2(t,s)ds\right)dt<+\infty.$$

Таким образом, управление $u(t,x)$ является допустимым.

Можно показать, что найденное управление действительно минимизирует функционал $J(u)$, а градиент $v(t,x)$, определенный формулой (16), принадлежит $W_1^2(D)$. Таким образом, при последних условиях задача оптимального управления полностью разрешена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Ф., Энджел Э.. Динамическое программирование и уравнения в частных производных, М.: Мир, 1974, 208 с.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1960, 308 с.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978, 464 с.
4. Ионкон Н.И. Решение краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. «Дифференциальные уравнения», 13, №2, 1977.
5. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973,408 с.

6. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми управлениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 414 с.

XƏTTİ PARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNƏ DİNAMİK PROQRAMLAŞDIRMA ÜSULUN TƏTBİQİ

K.Q. HƏSƏNOV, T.C.TANIRVERDİYEV

XÜLASƏ

İşdə xətti parabolik tənliklə təsvir olunan və kvadratik inteqral meyarlı optimal idarəetmə məsələsinə Bellmanın optimallıq prinsipi tətbiq olur. Alınan sintez məsələsinin iki sadə halına baxılır və dinamik proqramlaşdırmanın effektivliyi göstərilir.

Acar sözlər: idarə, funksional, Freşe törəməsi, qradient, Bellman tənliyi, Rikkati tipli inteqro-diferensial tənlik, məxsusi və qoşulmuş funksiyalar, təqribi həll.

APPLICATION OF DYNAMIC PROGRAMMING TO THE SOLUTION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE LINEAR PARABOLIC EQUATION

K.G.HASANOV, T.S.TANIRVERDIYEV

SUMMARY

In the work the Bellman's optimality principle is applied to the solution of the optimal control problem for the linear parabolic equation with integral quadratic criterion of quality. Further, two simpler cases are considered, which show efficiency of this method. The method of dynamic programming is often applied to the analysis and synthesis of optimal control systems [1, 2, 3].

Key words: control, functional, Freshet differential, Bellman's equation, Riccati integro-differential equation, eigenfunction, associated function, approximate solutions.

Поступила в редакцию: 17.11.2013 г.
Подписано к печати: 27.12.2013 г.